

# NUMERAZIONE

Per numerazione s'intende un insieme di regole per enunciare e scrivere i numeri. Quando in tempi e luoghi diversi i numeri fecero la loro comparsa, si affacciò l'esigenza di un sistema che permettesse di indicarli, a voce e per iscritto, impiegando poche parole e pochi segni fondamentali. Ogni popolo escogitò un proprio sistema di numerazione parlato e scritto, nel corso della storia molti furono i sistemi che si affermarono e poi scomparvero. Ancora oggi permangono diversi sistemi, ma il più diffuso nel mondo è il sistema della numerazione decimale.

## Antichi sistemi di numerazione

Come notò Aristotele, l'uso, oggi diffuso, della base decimale del sistema di numerazione non fu altro che il risultato del fatto che siamo nati con dieci dita dei piedi e dieci dita delle mani. Sebbene sembri che, storicamente, il contare con le dita sia venuto più tardi del calcolare per due o per tre, i sistemi quinario e decimale quasi sempre rimpiazzarono quello binario o ternario. Uno studio di centinaia di tribù di indiani d'America mostrò che quasi un terzo usava una base decimale e che circa un altro terzo aveva adottato un sistema quinario o quinario-decimale; meno di un terzo usava un sistema binario, e quelli che facevano uso di un sistema ternario costituivano meno dell'1% del gruppo. Il sistema vigesimale, a base venti, si riscontrava in circa il 10% delle tribù.

Mucchi di pietre erano mezzi troppo effimeri per la conservazione di informazioni; perciò l'uomo preistorico talvolta registrava i numeri incidendo intaccature su un bastone o su un osso. In Cecoslovacchia è stato trovato, per esempio, un osso di lupo che presenta, profondamente incise, cinquantacinque intaccature. Queste sono disposte in due serie: venticinque nella prima e trenta nella seconda; all'interno di ciascuna serie le intaccature sono distribuite in gruppi di cinque.



Queste ossa di lupo rappresentano uno dei più antichi dispositivi conosciuti per il conteggio.  
Sono state trovate in Cecoslovacchia nel 1937.

Tali scoperte archeologiche forniscono una prova del fatto che l'idea di numero è molto più antica dei progressi tecnologici come l'uso dei metalli. Tale idea precede la nascita della civiltà e della scrittura, nel senso usuale del termine: ci sono infatti pervenuti resti archeologici dotati di significato numerico, come l'osso sopra descritto, che appartengono a un periodo risalente a circa 30000 anni fa.

Altre testimonianze riguardanti i più antichi concetti di numero sono riscontrabili nella lingua inglese odierna. Per esempio, le parole *eleven* e *twelve* significavano, in origine, "uno in più" e "due in più", indicando il prevalere del concetto decimale.

Tuttavia è stata avanzata l'ipotesi che forse la parola indo-europea che sta ad indicare otto sia derivata da una forma duale usata per indicare quattro, e che la parola latina *novem* (nove) vada forse collegata con *novus* (nuovo), nel senso che era l'inizio di una nuova serie. Parole del genere possono venire interpretate come indicanti la persistenza per un certo periodo di una scala quaternaria o ottonaria, così come la parola francese

*quatrevingt* usata ancora oggi sembra essere il residuo di un sistema vigesimale.








Lo sviluppo del linguaggio ha avuto una importanza essenziale per il sorgere del pensiero matematico astratto: tuttavia, le parole che esprimono concetti numerici si vennero formando con relativa lentezza. Segni numerici precedettero le parole che indicavano numeri; è più facile praticare incisioni su un bastone che formulare una frase per indicare un numero. Quanto sia stata lenta la formazione di un linguaggio che esprimesse astrazioni quali il numero, si deduce anche dal fatto che le espressioni numeriche verbali primitive facevano sempre riferimento a specifiche raccolte concrete (due pesci, due bastoni) e che solo più tardi una espressione del genere fu adottata convenzionalmente per indicare tutti gli insiemi di due oggetti. In molte delle attuali misure di lunghezza si riscontra la tendenza del linguaggio a evolversi da forme concrete verso forme astratte: si pensi ad esempio al "piede", al "pollice" o al "braccio".

Consideriamo ora quale tipo di sistema di numerazione è stato adottato dalle grandi civiltà del passato e analizziamo come questi si sono evoluti nel tempo e come hanno interagito tra di loro.

Prendiamo quindi in esame la civiltà egiziana, quella mesopotamica, quella ebraica, quella greca, quella romana, quella cinese e, infine, quella maya.

## Il sistema di numerazione egiziano

Comprendere il mistero della numerazione geroglifica egiziana fu abbastanza semplice, poiché era basata su base dieci. Facendo uso di un semplice schema iterativo e di simboli distinti per ognuna delle prime sei potenze del dieci, gli egiziani riuscivano a incidere su pietra numeri superiori al milione. Un unico trattino verticale rappresentava l'unità, un archetto capovolto veniva usato per indicare 10, un laccio più o meno somigliante ad un punto interrogativo rappresentava 100, un fiore di loto 1000, un dito piegato 10000, un barbuto (simile a un girino) 100000 e una figura inginocchiata (forse il Dio dell'Infinito) 1000000.

						
<b>1 000 000</b>	<b>100 000</b>	<b>10 000</b>	<b>1 000</b>	<b>100</b>	<b>10</b>	<b>1</b>

Con la ripetizione di questi simboli si poteva scrivere, per esempio, il numero 3673 così:




Talvolta le cifre più piccole venivano collocate a sinistra, altre volte venivano disposte verticalmente. I simboli stessi potevano essere orientati in senso contrario: il laccio, per esempio, poteva essere convesso verso destra o verso sinistra.

Le informazioni matematiche che si possono ottenere dalle pietre tombali o dai calendari sono limitate, e il quadro dei contributi egiziani che ne possiamo trarre sarebbe oltremodo frammentario se dovessimo dipendere solo da documenti di carattere cerimoniale o astrologico. Fortunatamente possediamo altre fonti di informazione. Primo fra tutte, è il Papiro di Rhind: esso è largo circa 30 cm e lungo 5,46 m ed è stato acquistato nel 1858 in una località balneare sul Nilo da un antiquario scozzese, Henry Rhind. Deve perciò il nome al suo scopritore: meno frequentemente è indicato come il Papiro di Ahmes, in onore dello scriba che lo aveva trascritto attorno al 1660 a.C..

Il contenuto di questo papiro non è scritto nei caratteri geroglifici sopra descritti, ma in una scrittura più agile, nota come scrittura ieratica (sacra). La numerazione rimane decimale, ma il principio ripetitivo della numerazione geroglifica viene sostituito con l'introduzione di simboli speciali che rappresentano i numeri da 1 a 9 e i multipli delle potenze di 10. Così, quattro non viene più rappresentato con quattro trattini verticali, ma da una lineetta orizzontale; e sette non viene scritto con sette trattini, ma come una unica cifra simile ad una falce.


Le iscrizioni geroglifiche egiziane presentano una notazione speciale per le frazioni aventi come numeratore l'unità. Il numero reciproco di un qualsiasi intero veniva indicato collocando al di sopra del segno indicante il numero un ovale allungato.

Nella notazione ieratica, l'ovale allungato veniva sostituito da un puntino. Così, nel primo caso, la frazione

$\frac{1}{8}$  appariva , mentre nel Papiro di Rhind era scritto nella forma  $\frac{1}{8}$ .

Le frazioni venivano comunemente usate al tempo di Ahmes, ma il concetto generale di frazione sembra sia

rimasto un enigma per gli egiziani. Era molto usata la frazione  $\frac{2}{3}$ , per rappresentare la quale avevano uno

speciale segno ieratico ; talvolta usavano segni speciali per rappresentare frazioni della forma  $\frac{n}{(n+1)}$ , ossia per i complementari delle frazioni con numeratore unitario. Essi conoscevano e sfruttavano il fatto che

due terzi della frazione  $\frac{1}{p}$  è la somma delle due frazioni  $\frac{1}{2p}$  e  $\frac{1}{6p}$ ; erano anche consapevoli del fatto che il

doppio della frazione  $\frac{1}{2p}$  equivale alla frazione  $\frac{1}{p}$ . Tuttavia, sembra che, fatta eccezione per la frazione  $\frac{2}{3}$ ,

gli egiziani considerassero una frazione razionale generale del tipo  $\frac{n}{n}$  non come una "cosa" elementare ma

come parte di un processo inconcluso. Ciò rendeva semplice la rappresentazione di una frazione come  $\frac{1}{7}$ ,

ma scrivere  $\frac{2}{7}$  era molto più complesso. Quest'ultima, infatti, doveva essere rappresentata come somma di

frazioni con l'unità al numeratore: veniva quindi scomposta nella somma delle due frazioni  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{28}$ . Per facilitare questa operazione di riduzione, il Papiro di Rhind riporta una tabella che, per tutti i valori dispari di

$n$  da 5 a 101, esprime  $\frac{2}{n}$  come somma di frazioni aventi per numeratore l'unità. Ecco alcuni esempi:

- $\frac{2}{5}$  era espresso come  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{15}$ ;
- $\frac{2}{11}$  era espresso come  $\frac{1}{6}$  e  $\frac{1}{66}$ ;
- $\frac{2}{15}$  era espresso come  $\frac{1}{10}$  e  $\frac{1}{30}$ ;
- $\frac{2}{101}$  era espresso come  $\frac{1}{101}$ ,  $\frac{1}{202}$ ,  $\frac{1}{303}$  e  $\frac{1}{606}$ .

Le ragioni per cui una particolare forma di decomposizione venisse preferita a un'altra tra le innumerevoli possibili non sono chiare: forse la scelta, nella maggior parte dei casi, era dettata dalla preferenza degli

egiziani per frazioni derivate dalle frazioni  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$  mediante dimezzamenti successivi.

## Il sistema mesopotamico



Plimpton 322

Sulla matematica mesopotamica disponiamo di una documentazione molto più vasta che su quella egiziana, grazie ai diversi materiali usati per la registrazione di leggi, tasse, leggende, lettere ed altri documenti: non più fragili papiri, ma solide tavolette di argilla cotte al sole o in forni. Tuttavia, nonostante la grande quantità di materiale, fu la scrittura geroglifica egiziana, e non quella cuneiforme babilonese, ad essere decifrata per prima dagli studiosi moderni. Bisogna quindi aspettare la metà del XX secolo per riconoscere qualche

progresso nella lettura della scrittura babilonese, soprattutto nel campo della matematica.

Centinaia di tavolette di creta trovate a Uruk e risalenti a circa 5000 anni fa testimoniano della forma più antica di scrittura usata in Mesopotamia. A tale data la scrittura ideografica aveva raggiunto lo stadio di forme stilizzate convenzionali per indicare le cose, come delle onde per indicare l'acqua. Gradualmente il numero dei segni andò riducendosi, cosicché dei circa 2000 segni sumerici originariamente usati ne erano rimasti solo un terzo al tempo della conquista accadica. Disegni primitivi cedettero il posto a combinazioni di segni cuneiformi.

In un primo tempo gli scribi seguivano un tipo di scrittura verticale dall'alto in basso su colonne disposte da destra a sinistra; più tardi, per comodità, si girò la tavoletta in senso antiorario di  $90^\circ$  e la scrittura risultò così procedere da sinistra a destra su righe orizzontali dall'alto in basso.


Dapprima si usò uno stilo a forma di prisma triangolare, che più tardi venne sostituito da un altro costituito da due cilindri di diverso raggio. Agli inizi della civiltà sumerica, con l'estremo dello stilo più piccolo si tracciava un segno verticale per rappresentare 10 unità e un segno obliquo per indicare l'unità; analogamente, un segno obliquo fatto con lo stilo più grande rappresentava 60 unità e un segno verticale 3600 unità. Per rappresentare numeri intermedi si ricorreva alla combinazione di questi segni. Così, il numero 5112 era espresso in questo modo



Migliaia di tavolette risalenti al periodo della dinastia degli Hammurabi (1800-1600 a.C. circa) illustrano un sistema di numerazione ormai consolidato. Il sistema decimale era stato sostituito in Mesopotamia da una notazione che aveva a fondamento la base sessanta.

La numerazione cuneiforme babilonese seguiva lo stesso procedimento della numerazione egiziana, basato sulla ripetizione dei simboli indicanti le unità e le decine: ciò era sufficiente per esprimere numeri interi piccoli. Le difficoltà sorgevano nel rappresentare numeri grandi, a causa delle eccessive ripetizioni. Questi problemi furono risolti dai babilonesi con l'invenzione della notazione posizionale: i simboli potevano avere valore doppio, triplo, quadruplo, e così via, semplicemente attribuendo a essi valori che dipendevano dalla loro posizione relativa nella rappresentazione di un numero. Una appropriata spaziatura tra gruppi di cunei può distinguere posizioni che, lette da destra a sinistra, corrispondono a potenze crescenti della base: ciascun

gruppo ha allora un "valore locale" che dipende dalla sua posizione. Quando scrivevano  $\text{YY YY YY}$ , separando chiaramente i tre gruppi formati ciascuno da due cunei, intendevano significare con il primo gruppo a destra due unità, con il gruppo successivo il doppio della loro base e con il gruppo a sinistra il doppio del quadrato della loro base, cioè  $2(60)^2 + 2(60) + 2$ . Sembra che in un primo tempo i babilonesi non disponessero di un metodo chiaro per indicare una posizione vuota: non possedevano nessun simbolo per indicare lo zero, anche se talvolta lasciavano uno spazio vuoto. Tuttavia, ai tempi della conquista di Alessandro il Grande si disponeva di un segno speciale, consistente in due piccoli cunei disposti

obliquamente . A quanto pare, però, il simbolo usato dai babilonesi per indicare lo zero non pose fine a tutte le ambiguità, poiché sembra che tale segno venisse usato solo per indicare posizioni vuote intermedie.

Ciò vuol dire che i babilonesi dell'antichità non giunsero mai a un sistema le cui cifre avessero un valore posizionale assoluto. La posizione era solo relativa: il simbolo  $\Upsilon \Upsilon$  poteva rappresentare  $2(60) + 2$ , oppure  $2(60)^2 + 2(60)$ , o  $2(60)^3 + 2(60)^2$  e via di seguito.

Il segreto della netta superiorità della matematica babilonese rispetto a quella degli egiziani sta nel fatto che i primi ebbero l'idea di estendere il principio posizionale anche alle frazioni oltre che ai numeri interi. Quindi, la notazione  $\Upsilon \Upsilon$  veniva usata non solo per indicare  $2(60) + 2$ , ma anche  $2 + 2(60)^{-1}$  o per  $2(60)^{-1} + 2(60)^{-2}$  o per altre espressioni frazionarie composte da due basi frazionarie successive. Ciò significava che i babilonesi disponevano di un sistema di notazione che comportava una capacità di calcolo pari a quella della moderna notazione frazionaria decimale.

## Il sistema greco

In generale sembra che vi fossero in Grecia due sistemi principali di numerazione: uno, forse il più antico, è noto come il sistema attico (o erodianico), l'altro viene detto sistema ionico (o alfabetico). Entrambi i sistemi si basano sulla base dieci, ma il primo è più primitivo, essendo basato su un semplice schema iterativo come quello che si riscontra nella più antica numerazione geroglifica egiziana.

Nel sistema attico i numeri da uno a quattro erano rappresentati da trattini verticali ripetuti. Per il numero cinque si usava un nuovo simbolo: la prima lettera  $\Pi$  (o  $\Gamma$ ) della parola cinque, *penete*. (A quel tempo si usavano solo lettere maiuscole, sia in opere letterarie che in matematica). Per indicare i numeri dal sei al nove, il sistema attico aggiungeva al simbolo  $\Gamma$  dei trattini indicanti le unità. Per esprimere le potenze intere positive della base, venivano adottate le lettere iniziali delle corrispondenti parole numeriche:  $\Delta$  per *deca* (dieci),  $H$  per *hekatón* (cento),  $X$  per *khilioi* (mille) e  $M$  per *myrioi* (diecimila). Tranne che per la forma dei simboli, il sistema attico era molto simile a quello romano, ma aveva un vantaggio rispetto a quest'ultimo. Mentre i romani utilizzavano simboli diversi per indicare 50 e 500, i greci li scrivevano mediante la combinazione delle lettere che indicavano 5, 10 e 100: usavano quindi  $\Gamma^5$  (cioè 5 volte 10) per indicare 50 e  $\Gamma^4$  (cioè 5 volte 100) per indicare 500. Analogamente scrivevano  $\Gamma^x$  per 5000 e  $\Gamma^m$  per 50000.

Questo sistema di notazione compare in iscrizioni risalenti al periodo tra il 454 e il 95 a.C., ma all'inizio dell'Età alessandrina era già stato sostituito dalla numerazione ionica. Schemi alfabetici analoghi (probabilmente derivanti da questo) vennero usati da varie popolazioni semitiche, quali gli ebrei, i siriani, gli aramei e gli arabi.

Il sistema ionico probabilmente era stato in uso fino dal V secolo a.C.. Una delle ragioni che inducono a far risalire le origini di tale notazione a un'epoca così lontana è l'uso di ventisette lettere dell'alfabeto: nove per i numeri inferiori a 10, nove per i multipli di 10 inferiori a 100 e nove per i multipli di 100 inferiori a 1000. L'alfabeto greco dell'Età classica contiene solo ventiquattro lettere; pertanto si dovette far uso di un alfabeto più antico che comprendeva le lettere arcaiche stigma, coppa e sampi. Dopo l'introduzione delle lettere minuscole in Grecia, l'associazione di lettere e numeri si presentava così:

$\alpha$	alpha	1	$\iota$	iota	10	$\rho$	rho	100
$\beta$	beta	2	$\kappa$	kappa	20	$\sigma$	sigma	200
$\gamma$	gamma	3	$\lambda$	lambda	30	$\tau$	tau	300
$\delta$	delta	4	$\mu$	mu	40	$\upsilon$	upsilon	400
$\epsilon$	epsilon	5	$\nu$	nu	50	$\phi$	phi	500
$\zeta$	stigma	6	$\xi$	xi	60	$\chi$	chi	600
$\xi$	zeta	7	$\omicron$	omicron	70	$\psi$	psi	700
$\eta$	eta	8	$\pi$	pi	80	$\omega$	omega	800
$\theta$	theta	9	$\phi$	coppa	90	$\sigma$	sampi	900

Per i primi nove multipli di mille, il sistema ionico ricorreva alle prime nove lettere dell'alfabeto: ciò rappresentava un uso parziale del principio di posizione. Ma per maggior chiarezza queste lettere erano fatte precedere da un apice in basso, per esempio,  $\alpha$ . A partire da 10000 (miriade), la notazione ionica seguiva un

principio moltiplicativo: il simbolo di un numero intero qualsiasi da 1 a 9999, se collocato al di sopra della lettera **M**, o dopo di essa, separato dal resto del numero mediante un puntino, indicava il prodotto dell'intero per il numero 10000. Qualora si volessero rappresentare numeri ancora più grandi, si poteva applicare lo stesso principio alla miriade doppia.

Le antiche notazioni greche per indicare i numeri interi non erano eccessivamente ingombranti e servivano efficacemente al loro scopo. Nell'uso delle frazioni, però, si rivelavano inadeguate. I greci, come gli egiziani, tendevano a usare frazioni con numeratore unitario. La notazione era molto semplice: scrivevano il denominatore e lo facevano seguire da un accento per distinguerlo dal numero intero corrispondente. Così

$\frac{1}{34}$  aveva la forma  $\lambda \delta'$ . Questa espressione, però, poteva essere confusa con quella del numero  $30\frac{1}{4}$ : solo il contesto poteva chiarire il significato. Per arrivare all'uso di frazioni comuni e di frazioni sessagesimali bisogna attendere l'opera di Archimede e Diofanto.

## Il sistema ebraico

א	aleph	1	י	yodh	10	ק	qoph	100
ב	beth	2	כ	kaph	20	ר	resh	200
ג	gimel	3	ל	lamedh	30	ש	shin	300
ד	daleth	4	מ	mem	40	ת	taw	400
ה	he	5	נ	nun	50			
ו	waw	6	ס	samekh	60			
ז	zayin	7	ע	'ayin	70			
ח	heth	8	פ	pe	80			
ט	teth	9	צ	sadhe	90			

## Il sistema romano

I romani usavano utilizzare alcune lettere dell'alfabeto per indicare i numeri, come riportato nella tabella sottostante:

I	II	III	IV	V	X	L	C	D	CD
1	2	3	4	5	10	50	100	500	1000

E' da notare che il segno del 500 non è altro che la metà del segno del 1000 e finì col modificarsi in una **D**, come il secondo in una **M**.

In base alla tabella, per esempio, si ha:

$$XXX = 10 + 10 + 10 = 30$$

$$XII = 10 + 1 + 1 = 12$$

$$CXXIII = 100 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 123$$

$$MMMCCVII = 1000 + 1000 + 1000 + 100 + 100 + 5 + 1 + 1 = 3207.$$

La notazione romana è perciò un esempio di sistema a legge additiva. Di regola si usa il numero più grande possibile, così 15 si scrive XV e non VVV o XIII. Da ciò segue che i numeri sono sempre posti da sinistra a destra in ordine decrescente. Questo potrebbe portare alla scrittura di una lunga successione di simboli: per

esempio, per indicare 99, si dovrebbe scrivere LXXXXVIII.

In certi casi, quindi, la notazione romana usa anche la notazione sottrattiva, quando, per esempio, denota il 4 con IV cioè con 5-1. In generale, si può dire che nella notazione romana una cifra che stia immediatamente a sinistra di un'altra che indica un numero maggiore va intesa in senso sottrattivo.

Vi sono alcune regole da rispettare:

- Solo I, X e C possono essere usati in senso sottrattivo;
- Solo un numero più piccolo può essere posto a sinistra. Così, 19 può essere scritto XIX, ma 18 non può essere scritto XIIX.
- Il numero da sottrarre non deve essere meno di un decimo del valore del numero dal quale è sottratto. Così, X può essere posizionato a sinistra di C o di L, ma non a sinistra di M o di D. Quindi 49 si scrive XLIX e non IL.

Per indicare la moltiplicazione per 1000 si ricorreva alla semplice sovrapposizione di una lineetta.

$\overline{V} = 5000$  and  $\overline{X} = 10,000$ .

E' evidente che operare con i numeri romani è abbastanza difficile. A parte alcuni casi, in cui l'operazione si riduce a una semplice riscrittura dei simboli, come appare negli esempi successivi,

$CXXI + CXII = CCXXXIII$

$XVI + VII = XXIII$

$XVII - VI = XI$

$CXII \times II = CCXXIV$

le cose si complicano quando si deve operare con numeri in notazione sottrattiva:










$MCMXCVI + XIV = MCMXCXX = MCMCX = MMX$ .

## Il sistema cinese

Le civiltà fiorite lungo i fiumi Yangtze e Giallo sono paragonabili, per la loro antichità, a quelle sviluppatesi lungo il Nilo o tra il Tigri e l'Eufrate; tuttavia, i dati cronologici nel caso della Cina sono meno attendibili di quelli relativi all'Egitto e alla Babilonia. La datazione dei documenti matematici cinesi è molto difficile; si pensi, ad esempio, che le valutazioni riguardanti il *Chou Pei Suan Ching*, considerato il più antico testo di argomento matematico, differiscono tra loro di quasi un millennio, dal 1200 a.C. al 300 a.C..

La numerazione cinese era essenzialmente decimale e usava notazioni piuttosto diverse da quelle in uso in altre regioni. In Cina furono in uso fin dai primi tempi due sistemi di notazione: in uno era predominante il principio moltiplicativo, nell'altro veniva usata una forma di notazione posizionale. Nel primo schema vi erano simboli distinti per ogni cifra da uno a dieci e altri simboli per le potenze di dieci: nella scrittura dei numeri le cifre in posizioni dispari (da sinistra a destra o dal basso in alto) venivano moltiplicate per la cifra immediatamente successiva. Così il numero 678 sarebbe stato scritto come un sei seguito dal simbolo di cento, poi un sette seguito dal simbolo di dieci e infine il simbolo di otto.

Nell'altro sistema di notazione numerica a "bastoncini" le cifre da uno a nove e i primi nove multipli di dieci si presentavano così:

I	II	III	IIII	IIII	T	TT	TTT	TTTT
1	2	3	4	5	6	7	8	9
								
10	20	30	40	50	60	70	80	90

Usando questi simboli disposti alternativamente da destra verso sinistra, si potevano rappresentare numeri grandi quanto si voleva. E' impossibile determinare con precisione la data di nascita della numerazione a bastoncini, ma essa era certamente in uso parecchi secoli prima dell'Era cristiana. L'uso in Cina di un sistema posizionale centesimale, invece che decimale, era particolarmente adatto ai calcoli effettuati coi bastoncini disposti su una tavoletta. Notazioni distinte per potenze contigue di dieci permettevano ai cinesi di usare una tavoletta con colonne verticali non specificate. Prima dell'VIII secolo la posizione in cui si richiedeva uno zero veniva semplicemente lasciata vuota. Sebbene in testi anteriori al 300 d.C. i numeri e le tavole di moltiplicazione compaiano in forma scritta, di fatto i calcoli venivano effettuati con trattini o bastoncini rappresentanti i numeri e disposti su una tavoletta.

Come era avvenuto in Babilonia, solo più tardi comparve un simbolo per indicare una posizione vuota: un simbolo rotondo **O**. E' impossibile determinare con precisione la data di nascita della numerazione a bastoncini, ma essa era certamente in uso molti secoli prima che venisse adottata in India la notazione posizionale.

L'esposizione del sistema di numerazione cinese non sarebbe completa senza un accenno all'uso delle frazioni. Ai cinesi erano note le operazioni effettuate sulle frazioni comuni, in relazione alle quali essi erano in grado di trovare i minimi comuni denominatori. Come in altri campi, anche qui vedevano analogie con le differenze tra i sessi: indicavano il numeratore come "figlio" e il denominatore come "madre". Più importante di questi orientamenti, però, era la tendenza in Cina verso l'applicazione del sistema decimale alle frazioni.

L'idea di numeri negativi non sembra aver suscitato grandi difficoltà per i cinesi, poiché erano abituati a calcolare con due gruppi di bastoncini: un gruppo di bastoncini rossi per indicare numeri positivi e un gruppo di bastoncini neri per numeri negativi.

## Il sistema dei Maya

I Maya dello Yucatàn, nella rappresentazione degli intervalli di tempo tra le date del loro calendario, usavano una notazione posizionale, con venti come base primaria e cinque come base ausiliaria. Avevano un simbolo per ogni cifra da 0 a 19: le unità venivano rappresentate con dei punti e le cinque con delle aste, disposte in modo orizzontale o verticale come mostra la tabella. I maya dell'America centrale usavano lo zero centinaia di anni prima che fosse in uso in India. Quando gli europei arrivarono in America, essi trovarono che l'abaco era in uso sia in Messico che in Perù.

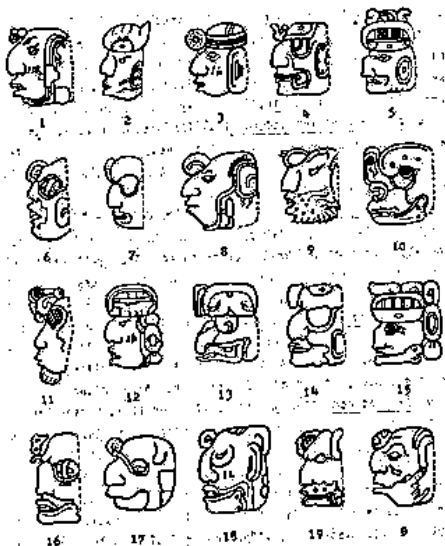
Numero	Forma verticale	Forma orizzontale	Numero	Forma verticale	Forma orizzontale
0			10		
1			11		
2			12		
3			13		
4			14		
5			15		
6			16		
7			17		
8			18		
9			19		

Veniva usato un ordinamento posizionale verticale, dove le unità di tempo maggiori venivano poste al di

sopra di quelle minori, così la notazione indicava 12(20) + 6.

Poiché tale sistema doveva servire principalmente a contare i giorni in un calendario avente 365 giorni in un anno, la terza posizione di solito non rappresentava multipli di 20·20, come avrebbe richiesto un sistema vigesimale, ma 18·20. Tuttavia, al di là di questa posizione tornava a prevalere la base venti.

Accanto a questi simboli, i maya erano soliti inserire dei simboli a forma di testa:



A questi 19 "numeri di testa" era aggiunto anche un simbolo speciale che indicava il 20.

Questo sistema di numerazione era molto semplice per sommare e sottrarre (bastava aggiungere e togliere dei punti e delle aste), però non considerava le frazioni.

## numerazioni additive e principio di posizione

Le antiche numerazioni si definiscono additive perché per leggere i numeri scritti in quei sistemi occorre sommare i valori di tutti i segni con i quali erano rappresentati. Per esempio nella num. romana il numero 673 è rappresentato dai simboli

DCLXXIII e cioè  $500+100+50+10+10+1+1+1=673$ .

Tale scrittura additiva dei numeri rendeva però complessa l'esecuzione delle operazioni aritmetiche, per cui col tempo si andò affermando il principio di posizione. Cosicché per eseguire i conteggi si tracciavano delle righe per terra e fra una riga e l'altra si collocavano delle pietruzze che costituivano le unità contate. Gli spazi compresi tra le righe corrispondevano ai vari ordini e ciascuna pietruzza valeva una unità dell'ordine corrispondente allo spazio nel quale era collocata, sicché il suo valore dipendeva dalla sua posizione rispetto alle righe. In seguito invece di tracciare righe per terra, si utilizzò un apposito strumento, che i Romani chiamarono **abacus**: costituito da una tavoletta di legno o terracotta con delle scanalature parallele nelle quali si disponevano le pietruzze, dette **calculi**, da cui la parola calcolo per indicare qualsiasi procedimento operativo.

## numerazione posizionale

Nel Medio Evo l'abaco fu semplificato in questo modo: sulla tavoletta erano incise quattro righe parallele e negli spazi tra esse si collocavano dei dischetti contrassegnati da nove segni differenti, le "cifre" per le unità da 1 a 9.

In ogni spazio si collocava un solo dischetto e questo rappresentava un numero dato dalla cifra indicata dal dischetto stesso ma di ordine relativo allo spazio in cui il dischetto era collocato. In seguito quando si cominciò a scrivere sulla carta, si pensò di fare a meno dell'abaco, lasciando che ogni cifra indicasse con la sua sola posizione l'ordine delle unità. Per indicare la mancanza di qualsiasi unità in qualcuno degli spazi dell'abaco si usò dapprima un semplice puntino e poi finalmente lo **zero**. L'invenzione e introduzione dello zero segnò il tramonto delle numerazioni additive e il sorgere delle numerazioni posizionali. La num. posizionale con l'utilizzo delle cifre, ci viene dall'India, dove le prime tracce di tale sistema risalgono al VI sec. d.C., ma la sua origine è ignota. Dopo l'anno 1000 fece la sua apparizione in Occidente per opera degli Arabi, la cui civiltà era più vicina a quella indiana. Nel 1202 l'italiano Leonardo Pisano, detto Fibonacci, dopo aver appreso durante i suoi viaggi in Oriente l'aritmetica coltivata dagli Arabi, la diffuse in Europa con il suo trattato **Liber Abaci** (libro dell'arte di fare i conti). Le cifre utilizzate per la scrittura posizionale dagli Indiani presero forma diversa secondo i luoghi e i tempi. La loro forma moderna risale al 1300 ca. inoltre vengono definite arabe, ma è incerta la loro origine.